Chapitre 1: Fondements mathématiques de la théorie des probabilités

I Introduction

Les débuts de la théorie des probabilités sont liés aux jeux de hasard.
Les problèmes présentés par De Méré à Pascal (1654):
(1) Est-il vrai que les chances d'obtenir au moins un double $(6, 6)$ en lançant 24 fois une paire de dés et, respectivement, d'obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé sont les mêmes?
(En lançant 2 dés, il y a 6 fois plus de résultats possibles. Les dés sont considérés comme parfaits, c'est-à-dire, toutes les faces sont équiprobables.)
(2) Supposons que le jeu soit interrompu avant la fin. Comment diviser le gain, compte tenue de la situation qui prévalait à ce moment-là?
Pascal a précisé que le partage devrait être proportionnel à la probabilité que le joueur gagne, si le jeu était joué jusqu'à la fin.
Pascal commence la correspondance avec Fermat.
Les jeux constituaient la base du développement de la théorie des probabilités, car ils proposaient des modèles simples et des possibilités illimitées pour reproduire les expériences (essais).
Bernoulli, Poisson, Cantelli, Borel, Kolmogorov,..., Wiener, Einstein,... ont été les pionniers.
La théorie des probabilités a des connections profondes et des applications dans de nombreux domaines: analyse, équations aux dérivées partielles, théorie des nombres, physique, ingénierie, finance,...

II Axiomes de la théorie des probabilités

Soit Ω un ensemble. Désignons par $\mathcal{P}(\Omega) := 2^{\Omega}$ la classe de tous les sous ensembles de Ω, et soit $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$.

Définition II.1

• $\mathcal{A}$ est une algèbre si elle vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessous:
(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,
(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
(iii) $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Remarque 1

Sous (ii), la condition (i) peut être remplacée par (i)': $\emptyset \in \mathcal{A}$
et, respectivement, sous (ii), la condition (iii) peut être remplacée par
(iii)': $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

• $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre (ou tribu) si elle vérifie les conditions (i), (ii) et (iv), où (iv) $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Remarque 2

Sous (ii), la condition (iv) peut être remplacée par (iv)': $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Définition II.2

Si $\mathcal{C} \subset 2^{\Omega}$, alors la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite σ-algèbre contenant $\mathcal{C}$.

Remarque 3

Puisque 2^{Ω} est une σ-algèbre, et l'intersection d'une famille de σ-algèbres est une σ-algèbre, on en déduit que $\sigma(\mathcal{C})$ existe. En fait, $\sigma(\mathcal{C})$ est l'intersection de toutes les σ-algèbres contenant $\mathcal{C}$.

Définition II.3

La tribu Borélienne de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}$, est la tribu engendrée par les ouverts. (De façon équivalente, $\mathcal{B}$ est engendrée par les fermés.) Autrement dit, si $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble de ouverts de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$.

En fait, pour comprendre $\mathcal{B}$ il est suffisant de considérer les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ comme en témoigne le théorème suivant.

Théorème II.4

La tribu Borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{Q}$ est un nombre rationnel.

Preuve

Désignons par $\mathcal{C}$ l'ensemble des intervalles ouverts. Puisque tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts, nous devons avoir $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$. Désignons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des intervalles ouverts $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{Q}$. Soit $]a, b[\in \mathcal{C}$ avec $b > a$ et $b \in \mathbb{Q}$. Soit

$$a_n = a + \frac{1}{n}$$

telle que $a_n \downarrow a$ quand $n \to +\infty$, et soit

$$b_n = b - \frac{1}{n}$$

telle que $b_n \uparrow b$ quand $n \to +\infty$. Nous avons

$$]a, b[= \bigcup_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{]-\infty, b_n] \cap]-\infty, a_n]^c\},$$

ce qui implique que $]a, b[\in \sigma(\mathcal{D})$. C'est-à-dire, $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{D})$, soit $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{D})$. Cependant, tout élément de $\mathcal{D}$ est un ensemble fermé, ce qui implique que implies $\sigma(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{B}$.

Ceci donne la chaîne d'inclusions

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{B}$$

et ainsi $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{B}$ prouvant le théorème.

Remarque 4

Il est possible de prouver que:

$\mathcal{B} = \sigma(\{]-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\})$,

$\mathcal{B} = \sigma(\{]a, b[: a \leq b\})$,

$\mathcal{B} = \sigma\Big(\Big\{\Big[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\Big[: k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\Big\}\Big)$.

Donnons maintenant une définition axiomatique d'une mesure de probabilité.

Définition II.5

Soit Ω un espace abstrait et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Une fonction d'ensembles $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ est dite (mesure) de probabilité sur $\mathcal{A}$ si elle vérifie les axiomes suivants dits de Kolmogorov

(1) $P(\Omega) = 1$, et

(2) si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ sont deux à deux disjoints, alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$.

Remarque 5

• Les conditions (1) et (2) portent respectivement les noms d'axiomes de normalisation et de σ-additivité.

• Si $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ est une mesure de probabilité, alors P est croissante:

$$\boxed{A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)}.$$

Preuve

Soient $A_1 = A$, $A_2 = B \cap A^c$, $A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset$. Alors d'après (2),

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \cap A^c)}_{\geq 0} \geq P(A).$$

L'additivité finie de P n'implique pas en général, la σ-additivité de P. Cependant, le théorème suivant nous donne des conditions sous lesquelles elles sont équivalentes.

Théorème II.6

Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre et supposons que $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ est une fonction d'ensembles vérifiant

(1) $P(\Omega) = 1$, et

(2) si $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ sont deux à deux disjoints, alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Axiome (2) de la Définition 1.4.

(ii) Si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \downarrow \emptyset$, alors $P(A_n) \downarrow 0$.

(iii) Si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \downarrow A$, alors $P(A_n) \downarrow P(A)$.

(iv) Si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \uparrow \Omega$, alors $P(A_n) \uparrow 1$.

(v) Si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \uparrow A$, alors $P(A_n) \uparrow P(A)$.

<u>Notation</u>

la notation $A_n \uparrow A$ signifie $A_n \subseteq A_{n+1}$ pour tout n et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A$, et la notation $A_n \downarrow A$

signifie $A_n \supseteq A_{n+1}$ pour tout n et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A$.

Preuve

$\boxed{(ii) \Leftrightarrow (iv)}$

$A_n \downarrow \emptyset$, alors $A_n^c \uparrow \Omega$, d'après l'axiome d'additivité finie $P(A_n^c) = 1 - P(A_n)$. Ceci prouve que $(ii) \Rightarrow (iv)$. La réciproque se montre de la même façon.

Par des arguments similaires, on montre que $\boxed{(iii) \Leftrightarrow (v)}$.

En prenant $A = \Omega$, nous obtenons $\boxed{(v) \Leftrightarrow (iv)}$.

Nous allons maintenant prouver que $\boxed{(iv) \Rightarrow (v)}$.

Soit $A_n \uparrow A$. Posons $B_n := A_n \cup A^c$ $\forall n \geq 1$. Donc $B_n \uparrow \Omega$, ainsi d'après (iv), $P(B_n) \uparrow 1$. Puisque $A_n \subset A$, $A_n \cap A^c = \emptyset$, par conséquent $P(A_n \cup A^c) = P(A_n) + P(A^c)$. Ainsi

$$1 = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} [P(A_n) + P(A^c)] \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 1 - P(A^c) = P(A).$$

Donc (v) est prouvée.

Il ne reste qu'à prouver que $\boxed{(i) \Leftrightarrow (v)}$.

Prouvons d'abord que $(v) \Leftrightarrow (i)$.

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ des éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints.

Soient $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1 \cup A_2$,..., $B_k = A_1 \cup \cdots \cup A_k$, $k \geq 2$. Soit $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

D'après la condition d'attitivité finie,

$$P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad \forall n \geq 1.$$

Mais $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \uparrow \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$ quand $n \to +\infty$. De plus $B_n \uparrow B$ quand $n \to +\infty$ et donc d'après (v), $P(B_n) \uparrow P(B)$. Par conséquent $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = P(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$.

Donc (i) est prouvée.

Nous allons maintenant prouver que $(i) \Rightarrow (v)$.

Soit $A_n \uparrow A$, $A_n \in \mathcal{A}$. Définissons $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \backslash A_1$,...,$B_n = A_n \backslash A_{n-1}$, $\forall n \geq 2$. Ainsi $(B_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux inccompatibles et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = A$. D'après (i) nous avons

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} [P(A_k) - P(A_{k-1})] = \lim_{n\to+\infty} P(A_n),$$

où $A_0 = \emptyset$.

<u>Notation</u>: Soit $A \in 2^{\Omega}$, on définit <u>la fonction indicatrice de A</u> par $1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si}\, \omega \in A \\ 0 & \text{si}\, \omega \notin A \end{cases}$.

On peut dire que $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ converge vers A si $\lim\limits_{n\to+\infty} 1_{A_n}(\omega) = 1_A(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Théorème II.7

Soit $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ une mesure de probabilité, et soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ telle que (A_n) converge vers A quand $n \to +\infty$. Alors $A \in \mathcal{A}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P(A)$.

Preuve

Définissons $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{m\geq n} A_m$, $\quad \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{m\geq n} A_m$.

Puisque $\mathcal{A}$ est une tribu, $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Puisque (A_n) converge vers A, $\limsup\limits_{n\to+\infty} 1_{A_n}(\omega) = 1_A(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. Cette condition est équivalente à $A = \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$. Ainsi $A \in \mathcal{A}$.

Maintenant soit $B_n := \bigcap\limits_{m\geq n} A_m$, $C_n := \bigcup\limits_{m\geq n} A_m$ $\forall n \geq 1$. Alors $B_n \uparrow A$ et $C_n \downarrow A$. Par conséquent d'après le théorème II.6,

$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n).$$

Cependant $B_n \subset A_n \subset C_n$ $\forall n \geq 1$, et ainsi $P(B_n) \leq P(A_n) \leq P(C_n)$.
On en déduit que $P(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$.

III Probabilité conditionnelle et indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité.

Définition III.1

(a) Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
(b) Une famille (éventuellement infinie) d'événements $(A_i)_{i\in I}$ est une famille indépendante si pour toute partie <u>finie</u> J de I, $P\Big(\bigcap\limits_{i\in J} A_i\Big) = \prod\limits_{i\in J} P(A_i)$.

Remarque 6

Si les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants (i.e., $\forall i \neq j, A_i$ et A_j sont indépendants), mais la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple qui suit:

Soit $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $P(\{i\}) = \dfrac{1}{4}$ $\forall i \in \Omega$. De plus soit $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{2,3\}$. Alors A, B et C sont deux à deux indépendants, mais ils <u>ne</u> sont pas indépendants.

Théorème III.2

(a) Si A et B sont deux événements indépendants alors il en est de même de A^c et B, de A et B^c, ainsi que de A^c et B^c.
(b) Si (A_n) est une suite d'événements indépendants, on obtient encore une suite d'événements indépendants en remplaçant un nombre quelconque de A_i par leurs complémentaires.

Preuve

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A^c).$$

Les autres assertions sont similaires.

Exemples 7

(1) Lancer d'une pièce 4 fois. Si A_i est un événement dépendant uniquement du i-ème lancer, alors il est naturel de modéliser $(A_i)_{1\leq i\leq 4}$ comme indépendants.

(2) On choisit au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.

Soient $A = \{$ la carte est un cœur$\}$ et $B = \{$ la carte est un roi$\}$. Alors $P(A) = \dfrac{13}{52}$, $P(B) = \dfrac{4}{52}$, $P(A\cap B) = \dfrac{1}{52}$. Ainsi A et B sont indépendants.

Définition III.3

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement A, on appelle probabilité conditionnelle de de A sachant B (ou probabilité conditionnelle de A sachant que B est realisé) le nombre réel noté $P(A/B)$ (ou $P_B(A)$) et défini par:

$$P(A/B = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Théorème III.4

Supposons que $P(B) > 0$

(a) A et B sont indépendants ssi $P(A/B) = P(A)$.

(b) L'opérateur $A \mapsto P(A/B)$ de $\mathcal{A} \to [0,1]$ définit une nouvelle mesure de probabilité sur $\mathcal{A}$, dite "mesure de probabilité conditionnelle étant donné B".

Preuve

(a) Immédiate.

(b) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, posons $Q(A) := P(A/B)$.

Nous allons montrer que Q satisfait les conditions (1) et (2) de la Définition II.5

(1)

$Q(\emptyset) = P(\emptyset/B) = \dfrac{P(\emptyset\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0.$

$Q(\Omega) = P(\Omega/B) = \dfrac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

(2) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors

$$\begin{aligned}
Q\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n/B\right) &= \frac{P\left[\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)\cap B\right]}{P(B)} = \frac{P\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cap B\right)\right]}{P(B)} \\
&= \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n\cap B)}{P(B)} \quad (A_n\cap B)_{n\geq 1}\text{ sont deux à deux incompatibles} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{P(A_n\cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n/B) = \sum_{n=1}^{+\infty} Q(A_n).
\end{aligned}$$

<u>Conséquence :</u> Les probabilités conditionnelles étant de vraies de probabilités, toutes les

propriétés des probabilités "simples" vues dans les cours élémentaires de probabilités sont encore valables pour les probabilités conditionnelles.

Théorème III.5 (Formule des probabilités composées)

Si $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ et si $P(A_1 \cap A_2 ... \cap A_{n-1}) > 0$, alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times ... \times P(A_n/A_1 \cap A_2 ... \cap A_{n-1}).$$

Preuve Utiliser une induction sur n.

$n = 1$ c'est triviale. $n = 2$ c'est la définition 2.2.

Supposons que l'énoncé soit vrai pour $n - 1$ événements. Alors

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap ... \cap A_n) &= P\left[(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \cap A_n\right] \\ &= P(A_n/A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \quad (n = 2) \\ &= P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times ... \times P(A_{n-1}/A_1 ... \cap A_{n-2}) \times P(A_n/A_1 ... \cap A_{n-1}) \\ & \quad \text{(en utilisant l'hypothèse d'induction).} \end{aligned}$$

Remarque 8

La formule des probabilités composées est aussi appelée formule de multiplication des probabilités ou règle des conditionnements succesifs.

Définition III.6

Une famille $(E_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de Ω est appelée partition de Ω (ou système complet d'événements) si:

- $E_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \geq 1$,
- $(E_n)_{n \geq 1}$ sont deux à deux disjoints,
- $P(E_n) > 0$ $\forall n \geq 1$,
- $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \Omega$.

Théorème III.7 (Formule des probabilités totales ou complètes)

Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une partition finie ou dénombrable de Ω. Alors,

$$P(A) = \sum_{n \geq 1} P(A/E_n) P(E_n) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Preuve

Nous avons

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n \right) = \bigcup_{n \geq 1} (A \cap E_n).$$

Puisque $(E_n)_{n \geq 1}$ sont deux à deux disjoints, il en est de même des $(A \cap E_n)_{n \geq 1}$. Ainsi,

$$P(A) = P\left[\bigcup_{n \geq 1} (A \cap E_n) \right] = \sum_{n \geq 1} P(A \cap E_n) = \sum_{n \geq 1} P(A/E_n) \times P(E_n).$$

Théorème III.8 (Théorème de Bayes)
Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une partition finie ou dénombrable de Ω et supposons que $P(A) > 0$. Alors

$$P(E_n/A) = \frac{P(A/E_n) \times P(E_n)}{\sum_m P(A/E_m) \times P(E_m)}.$$

Preuve
D'après le théorème 2.4., $\sum_m P(A/E_m) \times P(E_m) = P(A)$, ainsi le membre de droite devient

$$\frac{P(A/E_n) \times P(E_n)}{P(A)} = \frac{P(A \cap E_n)}{P(A)} = P(E_n/A).$$

Exemple 9
Supposons qu'une main de cinq carte soit tirée d'un jeu bien mélangé de 52 cartes. Quelle est la probabilité que la main soit un flush(i.e. toutes les cartes de la même couleur)?
Réponse: Un flush peut être de pique (Q), un flush de carreau (C), un flush de cœur (K) ou un flush de trêfle (T). Ces événements sont mutuellement indépendants et sont équiprobables. Ainsi

$$P(\text{flush}) = 4P(\text{flush de pique}).$$

Soit Q_i l'événement la i-ème carte tirée est un pique.

$$P(\text{flush de pique}) = P(Q_1)P(Q_2/Q_1)P(Q_3/Q_1 \cap Q_2)P(Q_4/Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3) = \frac{13}{52}.\frac{12}{51}.\frac{11}{50}.\frac{10}{49}.\frac{9}{48}.$$

Ainsi $P(\text{flush}) = 4.\frac{13}{52}.\frac{12}{51}.\frac{11}{50}.\frac{10}{49}.\frac{9}{48} = 0,00198$.

IV Probabilités sur un espace fini ou dénombrable

On suppose que Ω est fini ou dénombrable et $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.

Théorème IV.1
(a) Une probabilité sur l'espace fini ou dénombrable Ω est caractérisée par ses valeurs sur les atomes $p_\omega = P(\{\omega\})$ $\forall \omega \in \Omega$.
b) Soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une famille de nombres réels indexée par Ω. Alors il existe une unique mesure de probabilité P telle que $p_\omega = P(\{\omega\})$ si et seulement si $p_\omega \geq 0$ et $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

Preuve
(a) Soit $A \in \mathcal{A}$, alors $A = \bigcup_{\omega\in\Omega} \{\omega\}$. Si P est une probabilité,

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}\Big) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

Par conséquent, nous obtenons (a).
Ainsi pour calculer la probabilité d'un événement A, il suffit de connaître $P(\{\omega\})$ pour tout atome ω.

(b) Supposons qu'une telle probabilité existe.
Alors $\forall \omega \in \Omega$, $p_\omega = P(\{\omega\}) \geq 0$ et

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = P\Big(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\Big) = P(\Omega) = 1.$$

Pour le réciproque, Considérons $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ telle que $p_\omega \geq 0$ $\forall \omega \in \Omega$ et $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$. Pour tout $A \in \mathcal{A} = 2^\Omega$, définissons

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Alors $P(\emptyset) = 0$ (convention: sommer une un ensemble vide d'indices donne 0).
$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.
Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles,

$$P\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \sum_{\omega \in \ \bigcup_{i \in I} A_i} p_\omega = \sum_{i \in I} \sum_{\omega \in A_i} p_\omega = \sum_{i \in I} \Big(\sum_{\omega \in A_i} P(\{\omega\})\Big) = \sum_{i \in I} P\Big(\bigcup_{\omega \in A_i} \{\omega\}\Big) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Exemples 10

• Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1$, nous pouvons définir une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ en posant $P(\{k\}) = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}$.
• La distribution de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est la probabilité qui est definie sur $\mathbb{Z}^+$ par

$$P(\{n\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Remarquons que $P\{n\} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$; ainsi le support de P est $\mathbb{Z}^+$. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

• La distribution géométrique de paramètre α, $0 \leq \alpha < 1$, est la probabilité qui est definie sur $\mathbb{Z}^+$ par

$$P(\{n\} = (1 - \alpha)\alpha^n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Par convention, on pose $0^0 = 1$. Remarquons que si $\alpha = 0$, alors $P(\{0\}) = 1$ et $P(\{n\}) = 0$ pour tout $n = 1, 2, ...$ De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = P(\{0\}) = 1.$$

Si $\alpha \neq 0$, alors $P\{n\} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$. Nous avons aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-\alpha)\alpha^n = (1-\alpha)\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n = (1-\alpha).\frac{1}{1-\alpha} = 1.$$

Définition IV.2
Une probabilité P sur l'ensemble fini Ω est dite <u>uniforme</u> si $P(\{\omega\})$ ne dépend pas de ω, i.e. si $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{|\Omega|}$. Dans ce cas $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

Exemple 11
Construisons un espace de probabilité pour modéliser l'expérience consistant à lancer une pièce parfaite deux fois.
Nous devons définir avec soin $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ainsi, nous considérons que notre univers est

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$$

et notre σ-algèbre $\mathcal{A}$ est constituée des $|\mathcal{A}| = 2^{|\Omega|} = 2^4 = 16$ éléments.

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, PP, PF, FP, FF, \{PP, PF\}, \{PP, FP\}, \{PP, FF\}, \{PF, FP\}, \{PF, FF\},$$

$$\{FP, FF\}, \{PP, PF, FP\}, \{PP, PF, FF\}, \{PP, FP, FF\}, \{PF, FP, FF\}\}.$$

En général, Si Ω est fini, alors l'ensemble $\mathcal{A} = 2^\Omega$ (i.e., l'ensemble de tous les sous ensembles de Ω) est une σ -algèbre $|\mathcal{A}| = 2^{|\Omega|}$. Nous prenons notre probabilité comme une fonction d'ensembles $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ satisfaisant certaines conditions. Ainsi,

$$P(\emptyset) = 0, \qquad P(\Omega) = 1,$$

$$P(PP) = P(PF) = P(FP) = P(FF) = \frac{1}{4},$$

$$P(\{PP, PF\}) = P(\{PP, FP\}) = P(\{PP, FF\}) = P(\{PF, FP\})$$

$$= P(\{PF, FF\}) = P(\{FP, FF\}) = \frac{1}{2},$$

$$P(\{\{PP, PF, FP\}\}) = P(\{\{PP, PF, FF\}\}) = P(\{PP, FP, FF\}) = P(\{PF, FP, FF\}) = \frac{3}{4}.$$

Ainsi, si $A \in \mathcal{A}$, posons

$$P(A) = \frac{|A|}{4}.$$